Opis osiągnięć

Adam Kanigowski

1 Dane osobowe

- Adam Kanigowski
- Profesor nadzwyczajny
- Wydział Matematyki, Uniwersytet w Marylandzie

2 Edukacja

- X.2012-VI.2015: Studia doktoranckie w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk pod kierunkiem prof. dr hab. Mariusza Lemańczyka, tytuł rozprawy doktorskiej: *Własności ergodyczne gładkich potoków na powierzchniach.*
- X.2008-VI.2012: Studia magisterskie na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, tytuł pracy magisterskiej: *Twierdzenie Kreina-Rutmana dla operatorów stycznych.*

3 Zatrudnienie

- VIII.2021- dzisiaj : Profesor nadzwyczajny, Uniwersytet w Marylandzie.
- VIII.2018-VIII.2021: Adiunkt, Uniwersytet w Marylandzie.
- VIII.2015-VI.2018: postdoc, S. Chowla stipend, Uniwersytet Stanu Pensylwania, State College.

4 Opis osiągnięć

Podstawą osiągnięcia naukowego jest cykl pięciu opublikowanych artykułów naukowych pod wspólnym tytułem:

Dynamiczne niezmienniki dla układów o wzroście podwykładniczym

Wykaz artykułów składających się na osiągnięcie naukowe:

H1. A. Kanigowski, *Slow entropy for smooth flows on surfaces*, Israel J. Math., 226 (2018), 535–577.

H2. A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei, *Slow entropy of some parabolic flows*, Comm. Math. Phys., 370 (2019), 449–474.

H3. A. Kanigowski, D. Wei, *Product of two Kochergin flows with different exponents is not standard*, Studia Math., 244 (2019), 265–283.

H4. A. Kanigowski, T. de la Rue, *Product of two staircase rank one transformations that is not loosely Bernoulli*, Journal d'Analyse Math., 143 (2021) , 535–553.

H5. A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei, *Kakutani equivalence of unipotent flows*, Duke Math. J., 170 (2021), no. 7, 1517–1583.

4.1 Wstęp

Układy dynamiczne i teoria ergodyczna zajmują się badaniem reprezentacji grupy G jako automorfizmów przestrzeni z miarą: $g \mapsto T_g$. W dalszej części rozważymy najbardziej klasyczny przypadek, w którym grupą działającą jest $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{R}$, co odpowiada iteracji pojedynczego automorfizmu lub potokowi wzdłuż jednoparametrowej mierzalnej rodziny automorfizmów. Podstawowym sposobem próby sklasyfikowania takich działań jest wprowadzenie naturalnej relacji równoważności i zbadanie jej klas. Istnieje kilka relacji równoważności szeroko badanych w dynamice, z których najbardziej klasyczną jest relacja *izomorfizmu.* Przypominamy, że dwa działania grupowe $(T_g)_{g\in G}$ na (X,μ) i $(S_g)_{g\in G}$ na (Y,ν) są *(miarowo) izomorficzne*, jeśli istnieje (zachowujące miarę, odwracalne) odwzorowanie $R : (X,\mu) \to (Y,\nu)$ takie, że

$$R \circ T_g = S_g \circ R, \quad \text{dla wszystkich } g \in G.$$

Znacznie słabszą relacją równoważności niż izomorfizm jest *orbitalna równoważność.* Przypominamy, że $(T_g)_{g\in G}$ i $(S_g)_{g\in G}$ nazywamy *orbitalnie równoważnymi*, jeśli istnieje zachowujące miarę, odwracalne odwzorowanie $R : X \to Y$ przekształcające orbity $(T_g)_{g\in G}$ na orbity $(S_g)_{g\in G}$ (jako zbiory). Pośrednią (między izomorfizmem a równoważnością orbitalną) relacją jest *równoważność Kakutaniego* wprowadzona przez S. Kakutaniego [17]. Mówimy, że dwa $\mathbb{Z}$ działania T i S są równoważne (w sensie Kakutaniego), jeśli istnieją zbiory mierzalne $A \subset X$ i $B \subset Y$ takie, że $(T_{|A}, A, \mu_A)$ i $(S_{|B}, B, \nu_B)$ są izomorficzne, gdzie $T_{|A}$ i $S_{|B}$ oznaczają odpowiednie *automorfizmy indukowane*[1], a μ_A i ν_B oznaczają *miary warunkowe.* Analogicznie, mówimy, że dwa $\mathbb{R}$-działania $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ są równoważne (w sensie Kakutaniego) jeśli istnieje *zamiana czasu* wyjaśniamy to pojęcie w rozdziale poniżej) potoku $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$, która jest izomorficzna z $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (. Relacja dana przez orbitalną równoważność okazuje się trywialna, gdyż z twierdzenia Dye'a [6], [7] wynika, że dla $G = \mathbb{Z}$ (lub $\mathbb{R}$), dowolne dwa ergodyczne działania wolne są orbitalnie równoważne. Znacznie ciekawsza (i bardziej skomplikowana) jest sytuacja z izomorfizmem i równoważnością Kakutaniego. Bardzo naturalnym sposobem na próbę zrozumienia danej relacji równoważności jest wprowadzenie *dynamicznych niezmienników*, tj. wielkości, które pozwalają określić, kiedy dwa układy znajdują się w różnych klasach równoważności. Dla relacji izomorfizmu takim najbardziej klasycznym niezmiennikiem jest *entropia* natomiast dla równoważności Kakutaniego jest on nazywany *niezmiennikiem Kakutaniego* lub entropią Kakutaniego. Sklasyfikowanie działań $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{R}$ względem izomorfizmu lub równoważności Kakutaniego jest problemem trudnym do rozwiązania w pełnej ogólności (patrz np. [2], [13], [14], [16]). Dlatego sensowne jest zawężenie

[1] $T_{|A} : A \to A$, $T_{|A}(x) = T^{n(x)}x$, gdzie $n(x)$ jest pierwszym czasem powrotu do A (z analogiczną definicją dla $S_{|B}$).

klasy rozważanych układów dynamicznych i nadzieja na klasyfikację w tej mniejszej klasie.

Poniżej rozważymy przypadki izomorfizmu i równoważności Kakutaniego w dwóch osobnych podrozdziałach.

4.2 Niezmienniki dla problemu izomorfizmu

Dla układu dynamicznego jedną z najważniejszych i naturalnych cech jest jego złożoność. Dlatego naturalną rzeczą jest próba klasyfikacji układów dynamicznych na podstawie ich złożoności. Klasycznym sposobem pomiaru złożoności orbit dla układu dynamicznego, ciągłego lub miarowego, jest spojrzenie na wzrost liczby rozróżnialnych segmentów orbit jako funkcji czasu. Najbardziej klasyczną *skalą*, dla której mierzy się złożoność orbit, jest funkcja wykładnicza. Otrzymany w ten sposób niezmiennik dynamiczny (izomorfizmu) nazywany jest *entropią miarową* (lub entropią Kołmogorowa-Sinaja). Entropia okazała się bardzo użytecznym narzędziem w problemach klasyfikacji układów dynamicznych, z których najbardziej klasyczna jest teoria Ornsteina, dostarczająca kompletnej klasyfikacji układów Bernoulliego, [30].

Klasyczna entropia nie daje jednak żadnej informacji dla układów o podwykładniczym wzroście orbit (dla których jest zerowa). Dlatego naturalna jest próba wprowadzenia entropijnych niezmienników wzrostu podwykładniczego. Najwcześniejszą udaną konstrukcję niezmienników wolniejszego wzrostu dla układów zachowujących miarę podał Kushnirenko [29] i nazwał ten niezmiennik *entropią ciągową*. Chodzi o to, [29], aby odczekać wystarczająco dużo czasu, aby uzyskać zachowanie wykładnicze, nie względem liczby iteracji, ale raczej względem liczby pomiarów, tzn. zamiast rozważać standardowy ciąg kolejnych iteracji do obliczania asymptotycznego wzrostu różnych kodów, oblicza się asymptotyczny wzrost wzdłuż danego (dogodnego) podciągu kolejnych iteracji. Kushnirenko [29] użył entropii ciągowej do pokazania, że potok horocykli (który ma klasyczną entropię 0) nie jest izomorficzny ze swoim kwadratem kartezjańskim. Problem z entropią ciągową polega na tym, że jest ona często trudna do obliczenia.

Z drugiej strony, w [21], [23] A. Katok zaproponował liczenie liczby statystycznie różnych orbit (kul Hamminga) w skali, którą można dostosować do układu (podwykładniczej, wielomianowej, logarytmicznej, itd.). Podejście to zostało rozwinięte przez Katoka i Thouvenota, [24], gdzie klasyczna definicja wolnej entropii została uogólniona na działania grup ze średnią, a następnie wykorzystana do podania kryterium gładkiej realizacji działań $\mathbb{Z}^k$. Później Ferenczi [12] udowodnił, że znikanie miarowej wolnej entropii we wszystkich skalach jest równoważne dyskretnemu widmu w kategorii mierzalnej; ostatnio wraz z Vinhage i Wei [20] udowodniliśmy odpowiednik tego wyniku w kategorii topologicznej.

Przedstawimy teraz definicję wolnej entropii. Poniższa definicja jest wzorowana na [24] i [18]. Podajemy definicje dla potoków, definicje dla przekształceń można łatwo wydedukować przez oczywiste modyfikacje.

Niech $\varphi = (T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ działa na $(X, \mathcal{B}, \mu)$ gdzie $(X, \mathcal{B}, \mu)$ jest standardową przestrzenią probablistyczną borelowską, a $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_k\}$ jest skończonym (mierzalnym) rozbiciem X. Dla $T \in \mathbb{R}_+$ i $x \in X$ definiujemy *kodowanie* x jako funkcję $\phi_{\mathcal{P},T}(x) : [0,T] \to \{1,\ldots,k\}$ zdefiniowaną przez

$$\phi_{\mathcal{P},T}(x) = (x_s)_{s\in[0,T]}, \text{ gdzie } x_s = i \text{ o ile } T_s x \in P_i. \tag{4.1}$$

Dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in X$ ich *odległość Hamminga* (przy ustalonym T) względem $\mathcal{P}$ jest dana przez

$$\bar{d}^{\,T}_{\varphi,\mathcal{P}}(x,y) := \frac{T - l\left(\{s \in [0,T] \ : \ x_s = y_s\}\right)}{T},$$

gdzie l oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

Dla $\varepsilon > 0$, niech $B^T_{\varphi,\mathcal{P}}(x,\varepsilon) = \left\{y \in X : \bar{d}^{\,T}_{\varphi,\mathcal{P}}(x,y) < \varepsilon\right\}$ będzie ε-*kulą Hamminga o środku w punkcie* x. Następnie definiujemy[2]:

$$S(\mathcal{P},T,\varepsilon) = \min\left\{\mathrm{card}(F) : \mu\left(\bigcup_{x\in F} B^T_{\varphi,\mathcal{P}}(x,\varepsilon)\right) > 1-\varepsilon\right\}. \tag{4.2}$$

Dla funkcji $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takiej, że $a(T) \to \infty$ gdy $T \to \infty$ definiujemy

$$A(\varphi,\mathcal{P},\varepsilon,a) = \limsup_{T\to\infty} \frac{S(\mathcal{P},T,\varepsilon)}{a(T)}. \tag{4.3}$$

Zakładamy teraz, że mamy ustaloną rodzinę funkcji $a_\chi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\chi \in \mathbb{R}_+$ taką, ze jeśli $\chi < \chi'$, to dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$, $a_\chi(t) = o(a_{\chi'}(t))$.

Definicja 4.1. Definiujemy (wolną) entropie potoku $\varphi = (T_t)$ jako

$$h_{m,a_\chi}(\varphi) := \sup_{\mathcal{P}-\text{ rozbicie skończone}} h_{m,a_\chi}(\varphi,\mathcal{P}),$$

gdzie

$$h_{m,a_\chi}(\varphi,\mathcal{P}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup\{\chi : A(\varphi,\mathcal{P},\varepsilon,a_\chi) > 0\}\right).$$

Przypomnijmy, że (skończone) rozbicie $\mathcal{P}$ nazywamy *generatorem*, jeśli najmniejsza $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$- niezmiennicza σ- algebra zawierająca $\mathcal{P}$ jest całą σ-algebrą $\mathcal{B}$.

Stwierdzenie 4.2. ([24], Proposition 1.) Jeśli $\mathcal{P}$ jest generatorem, to

$$h_{m,a_\chi}(\varphi) = h_{m,a_\chi}(\varphi,\mathcal{P}).$$

Zwracamy uwagę, że z samej definicji wynika że wolna entropia jest niezmiennikiem izomorfizmu. Ponadto, dla potoku ergodycznego (T_t), jeżeli $a_\chi(t) = e^{\chi t}$, to otrzymany niezmiennik jest po prostu klasyczną entropią. W pracach H1. i H2. używamy tego niezmiennika odpowiednio w problemie izomorfizmu pewnych gładkich potoków na powierzchniach i potoków unipotentnych. Wyniki te opiszemy bardziej szczegółowo w rozdziale 5.

[2]Przypomnijmy, że miara μ jest regularna, a zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K_ε z $\mu(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ a więc $\mathrm{card}(F)$ jest skończona.

4.3 Równoważność Kakutaniego

Jak wspomniano powyżej, równoważność Kakutaniego jest relacją pomiędzy izomorfizmem a równoważnością orbitalną. Ze wzoru Abramowa [1], wynika, że równoważność Kakutaniego zachowuje klasy układów o zerowej entropii, dodatniej i skończonej entropii oraz nieskończonej entropii. Skupimy się tylko na układach o zerowej entropii. A. Katok [23], pokazał, że dowolne dwa aperiodyczne układy ergodyczne z dyskretnym widmem są równoważne (w sensie Kakutaniego). W szczególności, automorfizm T (potok $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$) jest układem *obszernie Kroneckera* (ang. loosely Kronecker) lub *obszernie Bernoulliego o zerowej entropii* lub *standardowym*, jeśli jest on równoważny z obrotem niewymiernym (z potokiem liniowym na $\mathbb{T}^2$).[3] Kakutani pierwotnie przypuszczał, że wszystkie układy o zerowej entropii są układami obszernie Kroneckera (choć nie używał tej terminologii) [17]. Okazuje się, że klasa układów obszernie Kroneckera jest dość szeroka, zawiera wszystkie układy lokalnej rangi jeden [11] i jest zamknięta na faktory, granice odwrotne i zwarte rozszerzenia [23], [33], [3]. Stąd wszystkie układy dystalne są układami obszernie Kroneckera, a w szczególności wszystkie nil-układy są układami obszernie Kroneckera.

Pierwszy układ o zerowej entropii, który nie jest obszernie Kroneckera, został skonstruowany przez J. Feldmana [10], metodą cięcia i nadstawiania (ang. cutting and stacking). Później, A. Katok [23] oraz D. Ornstein, D. Rudolph, i B. Weiss [33], niezależnie, skonstruowali nieprzeliczalnie wiele układów, które są parami nierównoważne w sensie Kakutaniego (oraz mają zerową entropię). Konstrukcje te stworzono jedynie w celu otrzymania przykładów automorfizmów, które nie są obszernie Kroneckera, i może dlatego nie budziły one ogólnego zainteresowania. W rzeczywistości, do tej pory klasyfikacja Kakutaniego gładkich układów z zerową entropią, poza przypadkami konstrukcji dla celów klasyfikacyjnch, została dokonana tylko w kilku szczególnych przypadkach przez M. Ratner. Mianowicie, w [34], pokazano, że potoki horocykli $(h_t)_{t\in\mathbb{R}}$ na przestrzeniach ilorazowych grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (o skończonej objetości) są obszernie Kroneckera. Następnie w [35], pokazano, że $h_t \times h_t$ działający na $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$, nie jest układem obszernie Kroneckera, dla dowolnej (hiperbolicznej) kraty kozwartej Γ. Wreszcie, w [36], pokazano, że iloczyn k-kopii (h_t) nie jest równoważny iloczynowi l-kopii z $k \neq l$. Metoda w [36] polegała na wprowadzeniu, dla ogólnego potoku (T_t), niezmiennika równoważności Kakutaniego, który nazwano *Kakutani invariant* i oznaczono przez $e((T_t), \log)$, który następnie okazał się być różny dla $(h_t^{\times k})$ i $(h_t^{\times l})$. Zauważmy, że przykłady Ratner pochodzą z bardzo specyficznej klasy, a mianowicie potoków unipotentnych na ilorazach półprostych grup Liego. Badanie równoważności Kakutaniego dla tych potoków zostało zasugerowane przez M. Ratner w jej wykładzie na ICM (patrz Problem 1 [37]). W tej klasie wszystkie poprzednie metody wymagają użycia pewnych własności kraty hiperbolicznej. W rezultacie, wyniki zostały ograniczone do bardzo specjalnej klasy iloczynów kartezjańskich grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ z kratami redukowalnymi. Przez wiele lat badania nad równoważnością Kakutaniego dla potoków unipotentnych nie posunęły się naprzód ze względu na te ograniczenia. Od czasu pracy M. Ratner w latach osiemdziesiątych ub. wieku, nie dokonano więk-

[3] Zauważmy, że swobodne układy Kroneckera są ergodyczne. Z powyższego wyniku A. Katoka wynika, że wszystkie obroty niewymierne (potoki liniowe na $\mathbb{T}^2$) są równoważne (w sensie Kakutaniego).

szego postępu w kwestii równoważności Kakutaniego dla żadnych naturalnie zdefiniowanych układów. W pracach H3.- H5. rozwijamy teorię, która pozwala na lepsze rozumienie równoważności Kakutaniego, w szczególności w H5. w pełni rozwiązujemy problem Ratner (Problem 1 powyżej).

Najpierw przypomnijmy definicję równoważności Kakutaniego. Dla potoku (T_t) określonego na $(X,\mathscr{B},\nu)$ oraz funkcji $\alpha \in L^1_+(X,\mathscr{B},\nu)$, potok (T^α_t) nazywamy *zamianą czasu* (T_t) (względem α), jeżeli

$$T^\alpha_t(x) = T_{u(t,x)}(x),$$

gdzie $u(t,x)$ jest (jedynym) rozwiązaniem

$$\int_0^{u(t,x)} \alpha(T_s x)ds = t.$$

Wynika z tego, że (T^α_t) zachowuje miarę $d\bar{\nu} := \alpha(\cdot)d\nu$.

Definicja 4.3 (Równoważność Kakutaniego, [21])**.** Potoki ergodyczne (T_t) na $(X,\mathscr{B},\nu)$ i (S_t) na $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{B}},\tilde{\nu})$ nazywamy równoważnymi w sensie *Kakutaniego*, jeśli (S_t) jest izomorficzny z (T^α_t) dla pewnej funkcji $\alpha \in L^1_+(X,\mathscr{B},\nu)$.

Poniżej, [38], przedstawimy niezmiennik Kakutaniego dla potoku ergodycznego (T_t) działającego na $(X,\mathscr{B},\nu)$. Dla skończonego rozbicia $\mathcal{P}$ przestrzeni X i punktu $x \in X$, oznaczamy przez $\mathcal{P}(x)$ atom $\mathcal{P}$ zawierający x i definiujemy $I_R(x) := \{T_s x : s \in [0,R]\}$. Niech l oznacza miarę Lebesque'a na $[0,R]$.

Definicja 4.4 ($(\varepsilon,\mathcal{P},R)$-zgodność, [38])**.** Dla $x,y \in X$, $\varepsilon > 0$ i $R > 1$, części orbit $I_R(x)$ i $I_R(y)$ nazywamy $(\varepsilon,\mathcal{P},R)$-zgodnymi, jeśli istnieje podzbiór $A = A(x,y) \subset [0,R]$, $l(A) > (1-\varepsilon)R$ i rosnąca, absolutnie ciągła funkcja $h = h(x,y) : [0,R] \to [0,R]$ taka, że h działa z A na $A' = A'(x,y) \subset [0,R]$, $l(A') > (1-\varepsilon)R$ przy czym $\mathcal{P}(T_t x) = \mathcal{P}(T_{h(t)}y)$ dla wszystkich $t \in A$ a ponadto pochodna $h' = h'(x,y)$ spełnia

$$|h'(t) - 1| < \varepsilon \text{ dla wszystkich } t \in A. \tag{4.4}$$

Funkcję h nazywamy $(\varepsilon,\mathcal{P},R)$-*dopasowaniem* z $I_R(x)$ na $I_R(y)$.

W oparciu o powyższą definicję definiuje się niezmiennik Kakutaniego.

Definicja 4.5 (niezmiennik Kakutaniego, [38])**.** Niech

$$f_R(x,y,\mathcal{P}) = \inf\{\varepsilon > 0 : I_R(x) \text{ i } I_R(y) \text{ są } (\varepsilon,\mathcal{P},R)\text{-zgodne}\}.$$

Następnie niech $B_R(x,\varepsilon,\mathcal{P}) = \{y \in X : f_R(x,y,\mathcal{P}) < \varepsilon\}$ będzie $(R,\mathcal{P})$-kulą o promieniu $\varepsilon > 0$ o środku w $x \in X$, $R > 1$. Rodzinę $\alpha_R(\varepsilon,\mathcal{P})$ $(R,\mathcal{P})$-kul o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy $(\varepsilon,\mathcal{P},R)$-pokryciem X, jeżeli $\nu(\cup\alpha_R(\varepsilon,\mathcal{P})) > 1-\varepsilon$. Oznaczmy $K_R(\varepsilon,\mathcal{P}) = \inf|\alpha_R(\varepsilon,\mathcal{P})|$, gdzie $|A|$ oznacza moc zbioru A, a infimum jest brane po wszystkich $(\varepsilon,\mathcal{P},R)$ pokryciach zbioru X. Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji nierosnących z $\mathbb{R}^+$ w siebie, rozbieżnych do $+\infty$. Dla $u \in \mathcal{F}$, oznaczamy

$$\begin{aligned} \beta(u,\varepsilon,\mathcal{P}) &= \liminf_{R\to\infty} \frac{\log K_R(\varepsilon,\mathcal{P})}{u(R)}; \\ e(u,\mathcal{P}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \beta(u,\varepsilon,\mathcal{P}); \\ e((T_t),u) &= \sup_{\mathcal{P}} e(u,\mathcal{P}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Przypominamy również następujące twierdzenia, pierwsze z nich to twierdzenie o generatorze.

Twierdzenie 4.6 (Twierdzenie o generatorze, [38])**.** Niech (T_t) będzie ergodycznym potokiem zachowującym miarę, określonym na $(X, \mathscr{B}, \nu)$ i niech $\mathcal{P}_1 \leqslant \mathcal{P}_2 \leqslant \dots$ będzie rosnącym ciągiem skończonych rozbić X takich, że $\vee_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$ generuje $\sigma-$algebrę $\mathscr{B}$. Wtedy $e((T_t), u) = \sup_m e(u, \mathcal{P}_m)$ dla wszystkich $u \in \mathcal{F}$.

Poniższe twierdzenie pokazuje, że powyższe wielkości (z pewnym niewielkim ograniczeniem na u) są niezmiennikami równoważności Kakutaniego.

Twierdzenie 4.7 ([38])**.** Niech (T_t) i (S_t) będą dwoma ergodycznymi, równoważnymi potokami określonymi odpowiednio na przestrzeniach $(X, \mathscr{B}, \nu)$ i $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{B}}, \tilde{\nu})$. Wówczas

$$e((T_t), u) = e((S_t), u)$$

dla wszystkich $u \in \mathcal{F}$ spełniających

$$\lim_{t\to\infty} \frac{u(at)}{u(t)} = 1 \text{ dla wszystkich } a > 0.$$

Ponadto, mamy następujące twierdzenie (np. [38]):

Twierdzenie 4.8. Potok ergodyczny o zerowej entropii zachowujący miarę (T_t) jest obszernie Kroneckera wtedy i tylko wtedy, gdy $e((T_t), u) = 0$ dla wszystkich $u \in \mathcal{F}$.

4.4 Klasy rozpatrywanych układów dynamicznych

W tym rozdziale opiszemy klasy układów dynamicznych rozważanych w H1.- H5.

4.4.1 Układy rangi jeden

Przedstawimy teraz definicję układów rangi jeden. Przypomnijmy, że układ rangi jeden konstruuje się przez cięcie i nadstawianie: ustalamy ciąg *cięć* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i ciąg *nadstawek* $(a_{n,i})_{i=1}^{p_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy $h_1 = 1$ i indukcyjnie

$$h_n = p_{n-1}h_{n-1} + \sum_{i=1}^{p_{n-1}} a_{n-1,i}, \quad \text{dla } n \geq 2. \tag{4.6}$$

Ciąg $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem *wysokości*. Układ T jest zbudowany z ciągów liczb naturalnych $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(a_{n,i})_{i=1}^{p_n}$, $n \in \mathbb{N}$ w następujący sposób: zaczynamy od przedziału $[0, 1]$, który dzielimy na p_1 równych przedziałów $(I_i^1)_{i=1}^{p_1}$. Dla każdego $i \in \{1, ..., p_1\}$ umieszczamy $a_{1,i}$ nadstawek (dodatkowe przedziały o tej samej długości co I_i^1), otrzymując itą podkolumnę. Następnie, nad pierwszą kolumną nadstawiamy kolejną, tzn. umieszczamy $(i + 1)$szą podkolumnę nad itą podkolumną dla każdego $i = 1, \dots, p_1 - 1$, i nazywamy tę nową wieżę $\mathcal{T}_2$ (z podstawą I_1^1). Układ T na $\mathcal{T}_2$ po prostu przesuwa punkty z przedziału o jeden poziom w górę, z wyjątkiem ostatniego poziomu, gdzie T nie jest jeszcze zdefiniowany. Następnie, indukcyjnie na etapie n, rozcinamy wieżę $\mathcal{T}_n$ o podstawie I_1^n na p_n równych podwież, nad itą podwieżą umieszczamy $a_{n,i}$ nadstawek, a następnie układamy w stos, otrzymując w ten sposób wieżę $\mathcal{T}_{n+1}$ o podstawie I_1^{n+1}. W wyniku tej konstrukcju, układ rangi jeden T jest zdefiniowany prawie wszędzie, tzn. jest zdefiniowany na $\mathcal{T}_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ (rozpatrujemy miarę Lebesgue'a). Często, jeśli w grę wchodzi więcej przekształceń, będziemy pisać indeks górny T w ciągach (p_n), $(a_{n,i})$, (h_n) i $\mathcal{T}_n$. W dalszej części będziemy zawsze zakładać, że $p_n > 1$ dla każdego n. To implikuje, że

$$h_n \geqslant 2^{n-1}. \tag{4.7}$$

Zakładamy też poniżej, że łączna miara wszystkich nadstawek jest skończona, tzn.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} p_k} \left(\sum_{i=1}^{p_n} a_{n,i} \right) < +\infty. \tag{4.8}$$

Przy założeniu (4.8), T zachowuje miarę probabilistyczną μ_T daną przez znormalizowaną miarę Lebesgue'a na $\mathcal{T}_\infty$. Jest klasycznym faktem, łatwo zauważalnym przy pomocy argumentu z punktami gęstości, że układy rangi jeden są ergodyczne względem miary Lebesgue'a. W szczególności T działa na $(\mathcal{T}_\infty, \mathcal{B}, \mu_T)$. Zbiór przekształceń rangi jeden (spełniających (4.8)) będzie oznaczany przez $Ranga(1)$. Dla układu rangi jeden T, niech $(p_n^T)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{n,i}^T)_{i=1}^{p_n^T}$ and $(h_n^T)_{n\in\mathbb{N}}$ oznaczają odpowiednio ciąg *cięć*, *nadstawek* i *wysokości*. Dla $0 < \gamma < \gamma' < 1$ definiujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\gamma,\gamma'} := \Big\{ & T \in Ranga(1) \ : \ \text{ istnieje } n'_T \in \mathbb{N} \text{ takie, że dla każdego } \ n \geqslant n'_T, \\ & p_n^T \in \left[(h_n^T)^\gamma, (h_n^T)^{\gamma'} \right], a_{n,i}^T > a_{n,i-1}^T \text{ dla } i = 2, \dots, p_n^T, \ \text{ i } a_{n,p_n}^T \leqslant (h_n^T)^{\gamma'} \Big\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Przypomnijmy, że T nazywamy układem *schodkowym* rangi jeden, jeśli $a_{n,i}^T = i$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $i \in \{1, \dots, p_n^T\}$. Zauważmy, że jeśli T jest układem schodkowym rangi jeden i jeśli $p_n^T \in [(h_n^T)^\gamma, (h_n^T)^{\gamma'}]$, to $T \in \mathcal{C}_{\gamma,\gamma'}$.

4.4.2 Gładkie potoki mieszające na torusie

Gładkie potoki na powierzchniach stanowią jedną z głównych klas badanych w teorii układów dynamicznych. Wymiar 2 jest najniższym, w którym możemy zaobserwować pewne nietrywialne własności ergodyczne i spektralne, tj. słabe mieszanie, mieszanie, zanik korelacji. Istotnie, w wymiarze 1 każdy gładki potok jest sprzężony z potokiem liniowym (który ma dyskretne widmo). Każdy gładki potok na powierzchni ma (klasyczną) entropię 0. Jest to konsekwencja wzoru Pesina [32]. Jedną z centralnych własności ergodycznych opisujących chaotyczność układu (w przypadku entropii 0) jest mieszanie. Jeśli gładki potok powierzchniowy nie ma punktów stałych, to zgodnie ze wzorem Lefschetza powierzchnia jest dwuwymiarowym torusem, a potok jest gładką zamianą czasu potoku liniowego. W tym przypadku mieszanie nigdy nie zachodzi [22]. Dlatego jeśli chcemy uzyskać przykłady mieszające w klasie gładkich potoków na powierzchniach, to musimy rozważyć potoki z punktami stałymi. Okazuje się, że przykłady mieszające istnieją już na dwuwymiarowym torusie. Rzeczywiście, Kochergin [28] skonstruował klasę potoków mieszających na torusie z co najmniej jednym zdegenerowanym punktem stałym (potoki Kochergina).

Jeśli wszystkie punkty stałe są niezdegenerowane i istnieją połączenia siodłowe, to Khanin i Sinai wykazali, że mieszanie zachodzi na składowej ergodycznej potoku [25] (potoki Arnol'da). W rzeczywistości (przy warunku diofantycznym dotyczącym częstotliwości) potoki Arnol'da i Kochergina są mieszające wszystkich rzędów, jak pokazaliśmy we wspólnej pracy z B. Fayadem, [9]. Ponadto okazuje się, że mieszanie może być ilościowe: razem z B. Fayadem i G. Fornim [8] pokazaliśmy że niektóre potoki Kochergina (o wysokim stopniu degeneracji siodła) na torusie mają przeliczalne widmo Lebesgue'a.

Powrzechnie uważa się, że gładkie potoki mieszające na torusie są układami o pośrednim (wielomianowym) wzroście ilości orbit. Rzeczywiście, z jednej strony mają one zerową entropię, ale z drugiej strony obecność punktu stałego powoduje rozciąganie, które skutkuje szybkim rozbieganiem się orbit bliskich punktów, gdy zbliżają się one do osobliwości. Naturalne jest oczekiwane, że wzrost ilości orbity powinien zależeć od stopnia degeneracji siodła. Bardzo przydatnym narzędziem w precyzowaniu pojęcia wielomianowego (lub superliniowego) wzrostu ilości orbit jest wolna entropia.

Potoki Kochergina i Arnol'da (z jedną osobliwością) na torusie mają reprezentację jako potoki specjalne nad obrotem niewymiernym (jako przekształceniem pierwszego powrotu) i pod funkcją dachową (pierwszy czas powrotu), która jest gładka z wyjątkiem jednego punktu, w którym jest nieciągłość drugiego rodzaju. Aby móc to uściślić, przypominamy konstrukcję potoku specjalnego.

Potoki specjalne nad obrotami Niech $R_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $R_\alpha(x) = x + \alpha \mod 1$, gdzie $\alpha \in \mathbb{T}$ jest liczbą niewymierną i niech $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathcal{B}, l_\mathbb{T})$ będzie funkcją dodatnią. Oznaczamy przez $d_\mathbb{T}$ odległość na okręgu. Przypominamy, że potok specjalny $T^t := T_t^f$ konstruowany nad R_α i pod f jest potokiem określonym prawie wszędzie wzorem

$$\begin{array}{rcl}(\mathbb{T} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}/\sim & \to & (\mathbb{T} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}/\sim \\ (x,s) & \to & (x, s+t),\end{array}$$

gdzie $\sim$ jest identyfikacją, określoną na $(\mathbb{T} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, przez

$$(x, s + f(x)) \sim (R_\alpha(x), s)\,.$$

Równoważnie, potok specjalny jest zdefiniowany na zbiorze $\{(x,s) \ : \ 0 \leqslant s < f(x)\}$ dla $t + s \geqslant 0$ (z podobną definicją dla czasów ujemnych) jako

$$T_t^f(x,s) = (x + N(x,s,t)\alpha, t + s - S_{N(x,s,t)}f(x)),$$

gdzie $N(x,s,t)$ jest jedyną liczbą całkowitą taką, że

$$0 \leqslant t + s - S_{N(x,s,t)}f(x) \leqslant f(x + N(x,s,t)\alpha),$$

i

$$S_nf(x) = \begin{cases} f(x) + \ldots + f(R_\alpha^{n-1}x) & \text{gdy} \quad n > 0; \\ 0, & \text{gdy} \quad n = 0; \\ -(f(R_\alpha^n x) + \ldots + f(R_\alpha^{-1}x)) & \text{gdy} \quad n < 0. \end{cases}$$

Reprezentacja specjalna potoków Kochergina i Arnol'da. Jak wspomniano powyżej, potoki Kochergina i Arnol'da są reprezentowane jako potoki specjalne nad obrotami niewymiernymi i pod funkcją dachową $f \in C^2(\mathbb{T} \setminus \{0\})$, która spełnia

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)}{h''(x)} = A \text{ i } \lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)}{h''(1-x)} = B,$$

gdzie $A^2 + B^2 > 0$ i jeśli

- $h(x) = -\log x$, to zakładamy dodatkowo, że $A+B \neq 0$ i wtedy odpowiadający potok specjalny (T_t^f) nazywamy potokiem Arnol'da.
- $h(x) = x^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, i wtedy taki potok specjalny nazywamy potokiem Kochergina (z wykładnikiem γ).

4.4.3 Potoki unipotentne

Ergodyczne i spektralne własności potoków unipotentnych na przestrzeniach jednorodnych były intensywnie badane w ostatnim półwieczu i są obecnie dość dobrze poznane. Jednym z przełomowych osiągnięć opisujących własności ergodycznych potoków unipotentnych jest teoria sztywności Ratner. W serii prac [39, 40] Ratner opisała tzw. zjawisko sztywność miar i połączeń w klasie potoków unipotentnych, a także pewnych ich zamian czasu. W tym rozdziale przypomnimy kilka podstawowych faktów z teorii grup Liego, przestrzeni jednorodnych i potoków unipotentnych, które pomogą nam sformułować niektóre główne wyniki w następnym rozdziale.

Niech G oznacza półprostą grupę Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Dla $g \in G$ niech $L_g, R_g : G \to G$ oznaczają odpowiednio lewe i prawe przesunięcie na G. Niech $\exp : \mathfrak{g} \to G$ oznacza odwzorowanie wykładnicze algebry Liego $\mathfrak{g}$ na G. Wtedy exp ma lokalnie funkcję odwrotną log odwzorowującą pewne otoczenie $e \in G$ w pewne otoczenie $0 \in \mathfrak{g}$. Niech $\Gamma \subset G$ będzie kratą (dyskretną podgrupą o skończonej ko-objętości). Wprowadzamy metrykę d_G (jako metryke indukowaną z następującej metryki na G) na przestrzeni jednorodnej G/Γ przez ustalenie najpierw metryki prawostronnie niezmienniczej na G. Ustalamy iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ na $\mathfrak{g}$, i definiujemy dla $v, w \in T_gG$:

$$\langle v, w\rangle = \langle dR_{g^{-1}}v, dR_{g^{-1}}w\rangle_0 .$$

Ponieważ iloczyn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jest prawostronnie niezmienniczy, więc indukuje on metrykę riemanowską na przestrzeni G/Γ. Zauważmy, że G działa na sobie przez sprzężenie $C_g : h \mapsto g^{-1}hg$, otrzymujemy więc *reprezentację addytywną* G na $\mathfrak{g} = T_eG$, $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Biorąc pochodną tego odwzorowania względem współrzędnej g, otrzymujemy odwzorowanie addytywne algebry Liego $\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, które pokrywa się z nawiasem Liego: $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$. Potok (ϕ_t) na G/Γ nazywamy *unipotentnym*, jeśli ϕ_t jest lewostronną translacją o $\exp(tU)$, gdzie $U \in \mathfrak{g}$ jest takie, że ${\mathrm{ad}_U}^k = 0$ dla pewnego k, gdzie $\mathrm{ad}_U \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Potok (ϕ_t) zachowuje miarę Haara μ na G/Γ.

Poniższa definicja jest istotna dla opisu wzrostu ilości orbit potoku unipotentnego:

Definicja 4.9. Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego, a $U \in \mathfrak{g}$ będzie elementem unipotentnym. *Łańcuch w* $\mathfrak{g}$ *względem* U *o głębokości* m jest liniowo niezależnym zbiorem $\{X_i : 0 \leq j \leq m\}$ takim, że X_0 jest w centralizatorze U oraz

$$\mathrm{ad}_U(X_i) = X_{i-1} \text{ dla wszystkich } 1 \leq i \leq m.$$

Baza łańcuchowa $\mathfrak{g}$ względem U jest bazą, która jest sumą łańcuchów. Ciąg głębokości $(m_1, \ldots, m_n)$ łańcuchów nazywamy *strukturą łańcuchową* U. Podstawy łańcuchów oznaczamy przez $\{X_i^1\}_{i=0}^{m_1}, \{X_i^2\}_{i=0}^{m_2}, \ldots, \{X_i^n\}_{i=0}^{m_n}$, gdzie każdy $\{X_i^j\}_{i=1}^{m_j}$ jest łańcuchem. Często będziemy oznaczać łańcuch używając notacji

$$X_n \mapsto X_{n-1} \mapsto \cdots \mapsto X_1 \mapsto X_0.$$

Liczby $(m_1, \ldots, m_n)$ nazywane *strukturą łańcuchową* U są rozmiarami bloków Jordana dla ad_U (patrz definicja 4.9). Następnie mamy następujący niezmiennik, który jest *tempem wzrostu* lub *wolną entropią* potoku (ϕ_t):

$$GR(U) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(m_i+1). \tag{4.10}$$

Liczba $GR(U)$ opisuje asymptotyczny wzrost ilości orbit. W poniższym przykładzie przedstawiamy naturalną klasę potoków unipotentnych.

Przykład 4.10. Niech $G = SL(d, \mathbb{R})$, $\Gamma \subset G$ zaś niech będzie dowolną kratą oraz

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \exp_{\mathrm{alg}}(tU) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{d-1}/(d-1)! \\ & 1 & t & \cdots & t^{d-2}/(d-2)! \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

U nazywamy *głównym* elementem nilpotentnym związanym z algebrą $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$. Wynika z tego, że $GR(U) = \frac{d}{6}(d-1)(4d+1)$.

W szczególnym przypadku $SL(d, \mathbb{R})$ każdy element algebry nilpotentnej jest sprzężony z elementem w formie blokowej

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & & & \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_n \end{pmatrix},$$

gdzie każdy $U_i \in \mathfrak{sl}(d_i, \mathbb{R})$ jest głównym elementem nilpotentnym. Zauważmy, że jest to dokładnie postać Jordana macierzy U.

5 Główne wyniki

W tym rozdziale przedstawiamy główne wyniki z prac H1.-H5. Podzieliliśmy te wyniki na dwie osobne sekcje dotyczące równoważności Kakutaniego i wolnej entropii.

5.1 Równoważność Kakutaniego

W tej części opiszemy główne wyniki badań z prac H3.-H5.

5.1.1 Główne wyniki z H3.

W H3. wraz z Wei pokazujemy, że produkt kartezjański dwóch potoków Kochergina (o różnych wykładnikach) nie jest obszernie Kroneckera. Badamy te potoki poprzez ich reprezentacje specjalne. Przypomnijmy (patrz rozdział 4.4.2), że potok Kochergina jest sparametryzowany przez obrót α i wykładnik γ. Aby podać nasz główny wynik, niech $(q_{\alpha,n})_{n\geqslant 1}$ oznacza ciąg mianowników $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Wprowadźmy następujący zbiór

$$\mathcal{D} := \{\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : q_{\alpha,n+1} < C(\alpha) q_{\alpha,n} \log q_{\alpha,n} (\log n)^2\}. \tag{5.1}$$

Z twierdzenia Khinchina, [26] wynika, że $l(\mathcal{D}) = 1$.

Twierdzenie 5.1. Niech $\gamma_1, \gamma_2 \in (-1, 0)$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ i niech $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{D}$. Wtedy czas jeden potoku $\mathcal{T}^{\alpha_1,\gamma_1} \times \mathcal{T}^{\alpha_2,\gamma_2}$ nie jest obszernie Kroneckera.

Uwaga 5.2. Twierdzenie 5.1 daje też nieprzeliczalnie wiele nieizomorficznych, gładkich potoków w wymiarze 4 które nie są obszernie Kroneckera . Brak izomorfizmu wynika z rezultatów uzyskanych w [18], które implikują nierówność wolnej entropii dla potokẃ, gdy $\gamma_1 + \gamma_2 \neq \gamma_1' + \gamma_2'$.

Aby pokazać, że układ produktowy nie jest obszernie Kroneckera wystarczy pokazać, że istnieją co najmniej dwie kule Kakutaniego, tzn. istnieją punkty, które nie mogą być zgodne. Głównym pomysłem w H3. jest użycie różnych prędkości rozciągania dla dwóch potoków $\mathcal{T}^{\alpha_1,\gamma_1}$ i $\mathcal{T}^{\alpha_2,\gamma_2}$ (jest to zagwarantowane warunkiem $\gamma_1 \neq \gamma_2$). Różne współczynniki rozciągania (oba wielomianowe o różnych wykładnikach) gwarantują sztywną strukturę na każdym możliwym dopasowaniu. Ważną obserwacją geometryczną jest to, że następujące dwie funkcje $\frac{1}{d}t^{1+\gamma_1}$ i $\frac{1}{d}t^{1+\gamma_2}$ (rozważane na długim przedziale $[0, T]$) są albo bliskie na dużym podprzedziale $[0, T]$ (co ma miejsce, gdy d jest duże względem T) albo są odległe od siebie na większości punktów przedziału $[0, T]$.

5.1.2 Główne wyniki z H4.

D. Ornstein, D. Rudolph i B. Weiss [33] skonstruowali układ rangi jeden T taki, że $T\times T$ nie jest obszernie Kroneckera. Przykład w [33] jest oparty na konstrukcji Ornsteina w [31] uladów rangi jeden z losowymi nadstawkami. Z drugiej strony, M. Gerber skonstruowała w [15] mieszający układ rangi jeden, którego kwadrat kartezjański jest obszernie Kroneckera. Przypomnijmy, że naturalną klasą mieszających układów rangi jeden są *układy schodkowe*. Nie wiadomo, czy produkty układów schodkowych rangi jeden są obszernie Kroneckera. Nasz główny wynik implikuje w szczególności, że istnieją dwa układy schodkowe rangi jeden, których iloczyn kartezjański nie jest obszernie Kroneckera.

Definicja 5.3 (ciągi δ-alternujące)**.** Ustalamy $\delta > 0$ i niech (a_n) oraz (b_n) będą dwoma rosnącymi ciągami liczb całkowitych dodatnich. Mówimy, że (b_n) jest (a_n)-*alternujące z wykładnikiem* δ, jeśli zachodzi następująca zależność: istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$

takie, że dla każdego $n \geqslant n_0$, jeśli $m(n)$ jest jedyne takie, że $b_{m(n)} \leqslant a_n < b_{m(n)+1}$, to $b_{m(n)}^{1+\delta} < a_n$ i $a_n^{1+\delta} < b_{m(n)+1}$. Ponadto, (a_n) i (b_n) nazywamy *δ-alternującymi*, jeśli (a_n) jest (b_n)-alternujący z wykładnikiem δ i (b_n) jest (a_n)-alternujący z wykładnikiem δ.

Pamiętając o definicji zbioru $\mathcal{C}_{\gamma,\gamma'}$ (patrz (4.9)), dla $0 < \gamma < \gamma' < 1$, niech

$$\mathcal{L}^{\gamma,\gamma',\delta} := \left\{(T,S) \in \mathcal{C}_{\gamma,\gamma'} \times \mathcal{C}_{\gamma,\gamma'} \ : \ (h_n^T) \text{ and } (h_n^S) \text{ są } \delta\text{-alternujące}\right\}. \tag{5.2}$$

Wspólnie z de la Rue, [19], pokazujemy następujący rezultat:

Twierdzenie 5.4. Jeśli T jest słabo mieszający i $(T,S) \in \mathcal{L}^{\gamma,\gamma',\delta}$ z $\delta < \gamma$, to $T \times S$ nie jest obszernie Kroneckera.

Pokazujemy również ważny:

Lemat 5.5. Dla każdego $T \in \mathcal{C}_{\gamma,\gamma'}$, $0 < \gamma < \gamma' < 1/3$, istnieje schodkowy układ rangi jeden $S \in \mathcal{C}_{\gamma/3,3\gamma'}$ taki, że $(T,S) \in \mathcal{L}^{\gamma/3,3\gamma',\gamma/4}$.

Z [4] wynika że schodkowe układy rangi jeden są mieszające. W związku z tym, twierdzenie 5.4 wraz z lematem 5.5 implikuje następujący rezultat:

Wniosek 5.6. Istnieją dwa układy schodkowe rangi jeden, których iloczyn kartezjański nie jest obszernie Kroneckera.

Nasza metoda wykorzystuje pewne pomysły z H3., ale główny mechanizm jest inny, a mianowicie układy rozważane w H3. mają superliniowy (w rzeczywistości wielomianowy ze stopniem bliskim 2) wzrost ilości orbit, co jest głównym źródłem bycia nie-obszernie Kroneckera. W naszym przypadku wzrost ilości orbit jest liniowy, a zamiast tego korzystamy z własności δ-alternacji (patrz definicja 5.3), która zapewnia, że wysokości wież tych dwóch przekształceń rangi jeden nigdy nie są tego samego rzędu. Ponieważ przekształcenie rangi jeden T jest zdefiniowane indukcyjnie przez ciąg zagnieżdżonych *wież* $(\mathcal{T}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, więc istnieje naturalne pojęcie odległości, a mianowicie dwa punkty x, y są w odległości $\frac{1}{h_m}$, jeśli $m \in \mathbb{N}$ jest największe takie, że x, y są na tym samym poziomie wieży $\mathcal{T}_m$. Aby pokazać, że układ nie jest obszernie Kroneckera, trzeba pokazać, że "typowe" punkty nie są bliskie w metryce $\bar{f}$ tzn. że dla typowych punktów nie ma dobrego dopasowania. Dla dwóch przekształceń rangi jeden T i S oraz typowych punktów $(x,y),(x',y')$ w przestrzeni produktowej, rozważmy pewne dopasowanie fragmentów orbit o długości N. Można wtedy podzielić takie dopasowanie na zbiory A_k w zależności od tego, do którego przedziału postaci $[2^{-k-1}, 2^{-k})$ należy maksimum odległości (dla T i S) danej iteracji automorfizmu $T \times S$. Głównym celem jest pokazanie, że moc zbioru A_k jest ograniczona przez Nk^{-2}. Wtedy fakt, że dopasowanie ma małą moc wynika z sumowania po k. Po pierwsze, ze względu na schodkową naturę T i S, pokazujemy, że jeśli dwa punkty znajdujące się na tym samym poziomie $\mathcal{T}_n$, ale nie na tym samym poziomie $\mathcal{T}_{n+1}$ osiągną wierzchołek $\mathcal{T}_n$ (co dzieje się przed czasem h_n), to ich orbity nie będą na tym samym poziomie $\mathcal{T}_n$ przez czas $\geqslant h_n^{1+2\xi}$ (dla jakiegoś $\xi > 0$). Wynika to z faktu, że za każdym razem, gdy orbity trafiają na szczyt, rozchodzą się o pewną dodatnią odległość (ze względu na schodkową naturę), ale jedynym sposobem, by znalazły się na tym samym poziomie wieży $\mathcal{T}_n$ jest rozejście o $\geqslant h_n$, co nie zdarza się przed $h_n^{1+2\xi}$ (suma odległości jest zbyt mała). W drugiej części pokazujemy, że jeśli x, x' są na tym samym poziomie wieży $\mathcal{T}_n$ (nie za blisko szczytu lub podstawy wieży $\mathcal{T}_n$), to jedyna możliwość że $T^i x$ i $T^j x'$ leżą na tym samym poziomie wieży $\mathcal{T}_n$ dla $i, j \leq \frac{h_n}{n^3}$ jest wtedy, gdy $i = j$. Mówiąc precyzyjniej, jeżeli x, x' znajdują się w odległości $\frac{1}{h_n^T}$ oraz (y, y') znajdują się w odległości $\frac{1}{h_m^S}$ (załóżmy, bez utraty ogólności, że $\frac{1}{h_n^T} < \frac{1}{h_m^S}$), to dopasowanie "pionowe" (tzn. dopasowanie $(T^i x, S^i y)$ z $(T^i x', S^i y')$) nie działa na A_k dla $i \in [h_m^S, (h_m^S)^{1+2\xi}]$ (może tylko działać dla $i \in [0, h_m^S]$). Z drugiej strony, używając $(h_m^S)^{1+2\xi} \leqslant \frac{h_n^T}{n^3}$ (przez δ-alternację) jedynym sposobem na dopasowanie $(T^i x, S^i y)$ do $(T^j x', S^j y')$ w A_k dla $i, j \in [h_m^S, (h_m^S)^{1+2\xi}]$ jest to, że $i = j$, tzn. dopasowanie *musi być* pionowe. Niespójność dopasowania na $[h_m^S, (h_m^S)^{1+2\xi}]$ daje ograniczenie $|A_k| \leqslant N k^{-2}$.

5.1.3 Główne wyniki z H5.

W tym podrozdziale opiszemy główne wyniki z H5. Przypominamy, że w rozdziałach 4.3 i 4.4.3 znajdują się potrzebne nam definicje.

Głównym wynikiem H5. jest następujący rezultat:

Twierdzenie 5.7. Niech G będzie półprostą grupą Liego, a $(\phi_t) = (L_{\exp(tU)})$ potokiem unipotentnym na G/Γ. Jeśli krata Γ jest kozwarta, to mamy (zob. (4.10))

$$e((\phi_t), \log) = GR(U) - 3.$$

Dla Γ o skończonej ko-objętości mamy

$$GR(U) - 4 \leqslant e((\phi_t), \log) \leqslant GR(U) - 3.$$

Ponadto, jeśli $GR(U) = 3$, to (ϕ_t) jest obszernie Kroneckera.

Korzystając z twierdzenia 5.7, można uzyskać wzory na $e((\phi_t), \log)$ dla kilku znanych potoków unipotentnych ze wzorów na $GR(U)$ otrzymanych w H5. Obliczając bezpośrednio, otrzymujemy $3k - 4 \leqslant e((h_t^{\times k}), \log) \leqslant 3k - 3$. To, w szczególności, uogólnia wynik M. Ratner, [36] na dowolną kratę w $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^k$. Jeżeli krata jest dodatkowo kozwarta, to $e((h_t^{\times k}), \log) = 3k - 3$. Twierdzenie 5.7 pozwala na wyprowadzenie następujących wniosków:

Wniosek 5.8. Jedynymi ergodycznymi potokami unipotentnymi na skończonych ilorazach półprostych grup Liego, które są obszernie Kroneckera, są potoki postaci $\phi_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \mathrm{id}$ działające na $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times G')/\Gamma$, gdzie krata Γ jest nieredukowalne.

Twierdzenie 5.7, rozwiązuje problem 1 postawiony przez M. Ratner w [37] (zob. też [27]), a mianowicie mamy:

Wniosek 5.9. Niech G będzie liniową półprostą grupą Liego o $\dim G > 3$, G/Γ zaś przestrzenią jednorodną G o skończonej objętości.

(i) Istnieją ergodyczne potoki unipotentne na G/Γ, które nie są obszernie Kroneckera.

(ii) Jeżeli G jest prosta, to żaden potok unipotentny na G/Γ nie jest obszernie Kroneckera.

(iii) Jeśli G ma stopień rzeczywisty co najmniej dwa, to istnieją dwa potoki unipotentne na G/Γ (niekoniecznie ergodyczne), które nie są równoważne (w sensie Kakutaniego).

(iv) Jeśli $G \cong \mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$, to istnieje co najmniej $d-1$ potoków na G/Γ, które są parami nierównoważne (w sensie Kakutaniego).

W istocie rzeczy przypuszczamy, że liczba parami nierównoważnych potoków na $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})/\Gamma$ zachowuje się jak wielomian d^3. Co więcej, nasz główny wynik pozwala również na skonstruowanie przykładów algebraicznych, które odpowiadają negatywnie na następujące pytanie A. Katoka, [23]: jeśli $T \circ S = S \circ T$ (tzn. S jest w centralizatorze T) i T jest obszernie Kroneckera, to czy wynika z tego, że S jest obszernie Kroneckera? Pierwsze takie kontrprzykłady zostały skonstruowane przez de la Rue w [5]. Jednakże, przykłady te dotyczyły układów gaussowskich, o których nie wiadomo, czy mają gładkie modele.

Wniosek 5.10. Niech $T = h_1 \times \mathrm{id}$ i $S = h_1 \times h_1$ działają na przestrzeni $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^2/\Gamma$, gdzie Γ kratą nieredukowalną. Wtedy S i T są ergodyczne, $T \circ S = S \circ T$, oraz T jest obszernie Kroneckera, a S nie jest obszernie Kroneckera.

Kluczową, nowatorską techniką pracy H5. jest opracowanie nowych metod liczenia niezmiennika Kakutaniego. Główna idea jest taka, że jeśli dwa punkty są bliskie w sensie Kakutaniego (co w ogólności jest bardzo trudne do kontrolowania), to są bliskie na długim bloku (w odniesieniu do metryki na G/Γ). W szczególności, pierwsza redukcja twierdzenia 5.7 polega na pokazaniu, że bycie w jednej (abstrakcyjnej) kuli Kakutaniego implikuje bycie w kuli Kakutaniego-Bowena. Kule te są określone algebraicznie, a nie dynamicznie, i możemy uzyskać dobre oszacowania ich wielkości. Mianowicie, aby zagwarantować długi przedział czasu, w którym orbity są bliskie, a nie tylko dużą część czasu, jak gwarantuje warunek Kakutaniego, trzeba pokazać, że orbity nie mogą się zbliżyć, rozdzielić i ponownie zbliżyć w małej ilości czasu i w dużych skalach. W rzeczywistości pokazujemy, że dla dowolnego dopasowania orbit, mniejsze odcinki czasu dopasowania nie mogą zajmować dużej części przedziału dopasowania.

Zwróćmy uwagę, że nasza technika w H5. różni się od metod Ratner z [35], [36]. W istocie rzeczy, metody w [35] i [36] są kluczowo oparte na fakcie, że krata jest produktem krat hiperbolicznych w $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Nasza metoda opiera się na kontrolowaniu algebraicznej (wielomianowej) dynamiki potoku unipotentnego, a nie na kontrolowaniu zachowania czasów powrotu za pomocą własności kraty.

5.2 Wolna entropia

W tej części opiszemy główne wyniki uzyskane w pracach H1. i H2.

5.2.1 Główne wyniki z H1.

W H1. obliczamy wolną entropię dla niektórych potoków Arnol'da i Kochergina. W tym celu najpierw definiujemy zbiór obrotów, które bierzemy pod uwagę. Niech (q_n) oznacza ciąg mianowników liczby α. Niech

$$\mathcal{D} := \{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ : \ q_{n+1} \leqslant C(\alpha) q_n \log q_n (\log n)^2\}.$$

Z twierdzenia Khinchina, [26], wynika że $l(\mathcal{D}) = 1$. Dla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niech $K_\alpha := \{n \ : \ q_{n+1} \leqslant q_n \log^{7/8} q_n\}$ i połóżmy

$$\mathcal{E} := \{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ : \ \sum_{i \notin K_\alpha} \log^{-7/8} q_i < +\infty\}.$$

W [9] pokazano, że $l(\mathcal{E}) = 1$. Przy powyższych definicjach nasze główne twierdzenia są następujące:

Twierdzenie 5.11. Niech $a_\chi(t) = \chi(\log \chi)^t$. Wtedy dla każdego $\alpha \in \mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ i odpowiadającego mu potoku Arnol'a (T_t^f) mamy, że wolna entropia (T_t^f) względem a_χ jest równa 1.

Drugie główne twierdzenie dotyczy potoków Kochergina.

Twierdzenie 5.12. Niech $a_\chi(t) = \chi^t$, $\chi > 0$. Wtedy dla każdego $\alpha \in \mathcal{D}$ i każdego $\gamma \in (0, 1)$, dla odpowiadającego mu potoku Kochergina $(T_t^{f,\gamma})$ mamy, że wolna entropia (T_t^f) względem a_χ jest równa $1 + \gamma$.

W H1. podajemy również górne ograniczenie na wolną entropię potoków lokalnie rangi jeden (definicja patrz np. [11]). To wraz z twierdzeniami 5.11, 5.12 ma następującą konsekwencję:

Wniosek 5.13. Każdy potok Arnol'da z częstotliwością w $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ nie ma lokalnej rangi jeden. Każdy potok Kochergina z częstotliwością w $\mathcal{D}$ nie ma lokalnej rangi jeden. Ponadto dwa dowolne potoki Kochergina o częstotliwościach w $\mathcal{D}$ i różnych wykładnikach $(\gamma \neq \gamma')$ nie są izomorficzne.

Aby wyliczyć przyrost ilości orbit w twierdzeniach 5.11 i 5.12 należy zbadać sumy Birkhoffa pochodnej f. Przyrost sum Birkhoffa w przypadku asymetrycznych osobliwości logarytmicznych jest rzędu $n \log n$, w przypadku osobliwości potęgowych przyrost jest rzędu $n^{1+\gamma}$. To uzasadnia wybór skali w twierdzeniach 5.11 i 5.12, a także daje intuicję co do górnego ograniczenia na wolną entropię (wiążemy liczbę kul Hamminga przez liczbę kul Bowena (kul topologicznych). Trudniejsze i bardziej istotne jest ograniczenie dolne, tzn. trzeba pokazać, że statystyczny przyrost ilości orbit (z metryką Hamminga) jest równy przyrostowi ilości orbit z metryką Bowena. Strategie dowodu dolnego ograniczenia są różne w twierdzeniu 5.11 i twierdzeniu 5.12. W pierwszym z nich opieramy się na powolnym, równomiernym rozbieganiu się sąsiednich orbit, a mianowicie własności Ratner ([40]). Jest ona oparta na pewnych pomysłach z [9], gdzie pokazano, że własność Ratner (w słabszej postaci) zachodzi prawie wszędzie dla potoku Arnol'da. Jednak w przypadku twierdzenia 5.12, własność Ratner zachodzi tylko dla zbioru obrotów niewymiernych o mierze 0. Dlatego musimy zastosować inną strategię. Technika ta opiera się na wielomianowym rozbieganiu się orbit (w kierunku potoku) oraz własności równomiernego rozkładu dla automorfizmu bazowego (oszacowania typu Denjoy-Koksma).

5.2.2 Główne wyniki z H2.

W H2. obliczamy wolną entropię (z wielomianową funkcją skalującą) dla potoków unipotentnych (w rzeczywistości obliczamy ją dla potoków quasi-unipotentnych, co jest bardziej ogólne). Pokazujemy również, że topologiczna i metryczna wolna entropia są równe, a więc w klasie potoków unipotentnych obowiązuje zasada wariacyjna. Główny wynik to:

Twierdzenie 5.14. Niech $a_\chi(t) = t^\chi$ i $\varphi_t = \exp(tU)$ będzie potokiem unipotentnym na przestrzeni jednorodnej o skończonej objętości. Wtedy topologiczna i miarowa wolna entropia φ_t w odniesieniu do a_χ są równe $GR(U)$ (zob. (4.10)).

W szczególności wynika z tego, że wolna entropia nie zależy od kraty (liczba $GR(U)$ zależy tylko od struktury bloków Jordana). Główną ideą tego twierdzenia jest pokazanie, że bycie w jednej kuli Hamminga w rzeczywistości implikuje bycie w jednej (nieco większej) kuli Bowena. Wynika to z wielomianowego charakteru rozbieżności bliskich punktów. Zwracamy uwagę na to, że nasze wyniki obowiązują również w sytuacji niezwartej. Założenie o zwartości pozwala zagwarantować, że rozdzielenie orbit następuje na poziomie lokalnym, a mianowicie rozdzielenie dla potoku implikuje, że punkty rozdzielają się również w nakryciu uniwersalnym. W sytuacji niezwartej może się zdarzyć, że punkty rozdzielają się w nakryciu uniwersalnym, ale nie rozdzielają się w przestrzeni ilorazowej. Dzieje się to dokładnie wtedy, gdy orbity uciekają w kierunku wierzchołka. Trzeba więc pokazać, że dla dużego zbioru punktów czas, jaki orbity spędzają w sąsiedztwie wierzchołka, jest niewielką częścią rozpatrywanego przedziału czasu.

5.3 Inne publikacje i wyniki

W tym rozdziale wymieniamy i krótko opisujemy inne wyniki. Podzieliliśmy je tematycznie na kilka podrozdziałów poniżej.

5.3.1 Własność Ratner dla gładkich potoków na powierzchniach

1. A. Kanigowski, *Ratner's property for special flows over irrational rotations under functions of bounded variation*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 35 (2015), 915-934.

2. A. Kanigowski, *Ratner's property for special flows over irrational rotations under functions of bounded variation II*, Coll. Math., 136 (2014), 125-147.

3. A. Kanigowski, J. Kułaga-Przymus, *Ratner's property and mild mixing for smooth flows on surfaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 36 (2016) 1-25.

4. B. Fayad, A. Kanigowski, *Multiple mixing for a class of conservative surface flows*, Invent. Math., 203 (2) (2016), 555-614.

5. A. Kanigowski, J. Kułaga-Przymus, C. Ulcigrai, *Multiple mixing and parabolic divergence in smooth area-preserving flows on higher genus surfaces*, J. Eur. Math. Soc., 21 (2019) 3797–3855.

Ta część moich badań koncentruje się na uogólnieniu pewnej szczególnej własności dynamicznej układów jednorodnych odkrytej przez M. Ratner na kontekst niejednorodny. W szczególności, w 4. wprowadziliśmy tzw. *przełączeniowaą własność Ratner* (własność SWR) a następnie udowodniliśmy jej zachodzenie w 3., 4. i 5. dla gładkich potoków na powierzchniach. W 4. i 5. rozwiązaliśmy problem Rohlina z lat 50-tych ub. wieku w klasie gładkich potoków na powierzchniach. A dokładniej,pokazaliśmy że mieszanie implikuje mieszanie wszystkich rzędów w klasie gładkich potoków w wymiarze 2. Ponadto w 3. i 5. po raz pierwszy w literaturze udało się pokazać własność SWR dla potoków specjalnych nad *przekładaniem odcinków.*

5.3.2 Sztywność i elastyczność własności ergodycznych w gładkiej dynamice

1. A. Kanigowski, F. Rodriguez-Hertz, K. Vinhage, *Smooth K non-Bernoulli automorphisms in dimension* 4, J. Mod. Dyn., 13 (2018), 221-250.

2. C. Dong, A. Kanigowski, *Rigidity of a class of smooth singular flows on* $\mathbb{T}^2$, J. Mod. Dyn., 16 (2020), 37-57.

3. A. Kanigowski, *Bernoulli property for homogeneous systems*, submitted, arXiv:1812.03209.

4. C. Dong, A. Kanigowski, *Bernoulli property for certain skew products over hyperbolic systems*, accepted Transactions of the AMS, arXiv:1912.08132.

5. D. Dolgopyat, C. Dong, A. Kanigowski, P. Nandori, *Mixing properties of generalized T, T^{-1} transformations*, submitted, accepted Israel J. Math, arXiv:2004.07298.

6. D. Dolgopyat, C. Dong, A. Kanigowski, P. Nandori, *Flexibility of statistical properties for smooth systems satisfying the central limit theorem*, arXiv:2006.02191.

7. D. Dolgopyat, A. Kanigowski, F. Rodriguez-Hertz, *Exponential mixing implies Bernoulli*, submitted.

W tej części moich badań zajmuję się własnościami ergodycznymi układów gładkich. W (1) pokazaliśmy istnienie układów K na $\mathbb{T}^4$, które nie są układami Bernoulliego. Rozwiązało to problem postawiony przez D. Rudolpha w latach 80-tych ub. wieku. W 3. udało mi się udowodnić twierdząco hipotezę postawioną niezależnie przed S. Daniego i R. Bowena z lat 70-tych ub. wieku, czy potoki jednorodne o dodatniej entropii są potokami Bernoulliego. W 6. skonstruowaliśmy pierwsze układy K które nie so Bernoulliego i które spełniają centralne twierdzenie graniczne. Udało nam się również pokazać, że istnieją układy o *zerowej entropii*, dla których obowiązuje centralne twierdzenie graniczne. Rozwiązało to problem J.-P. Thouvenota z lat 90-tych ub. wieku. W 7. pokazaliśmy, że mieszanie wykładnicze implikuje własność Bernoulliego (a w szczególności dodatnią entropię), odpowiadając na pytanie A. Katoka (pytanie to zadawali również inni badacze).

5.3.3 Połączenia dla układów parabolicznych

1. A. Kanigowski, M. Lemańczyk, *Flows with Ratner's property have discrete essential centralizer*, Studia Math., 237 (2017), 185-194.
2. G. Forni, A. Kanigowski, *Multiple mixing and disjointness for time-changes of bounded type Heisenberg nilflows*, J. Ec. Polytech. Math, 7 (2020), 63-91.
3. A. Kanigowski, A. Solomko, *Isomorphism problem for von Neumann flows*, Israel J. Math., 226 (2) (2018), 685-702.
4. A. Kanigowski, M. Lemańczyk, C. Ulcigrai, *On disjointness properties of some parabolic flows*, Invent. Math. 221 (2020) 1-111.
5. C. Dong, A. Kanigowski, D. Wei, *Rigidity of joinings for some measure preserving systems*, ukaże się w Ergodic Theory Dynam. Systems, arXiv:1812.05483.

Ta część moich badań dotyczy teorii połączeń w *układach parabolicznych.* W 1. rozwiązaliśmy pytanie J.-P. Thouvenot'a pokazując, że własność Ratner implikuje łagodne mieszanie (a więc wyklucza sztywność). W 4. wprowadziliśmy nowe techniki wykrywania *rozłączności (Furstenberga) dwóch układów.* Następnie użyliśmy go do pokazania rozłączności różnych przeskalowań zamian czasu potoków horocyklicznych. Pozwoliło to na pokazanie hipotezy Sarnaka dla zamian czasu potoków horocykli, a także stanowiło odpowiedź na pytanie M. Ratner z 2013 roku. W 2. zmodyfikowaliśmy kryterium rozłączności do badania połączeń różnych zamian czasu potoków Heisenberga.

5.3.4 Własności spektralne układów gładkich

1. G. Forni, A. Kanigowski, *Time changes of Heisenberg nilflows*, Asterisque, 416 (2020), 253-299.
2. A. Kanigowski, D. Ravotti, *Polynomial 3-mixing for smooth time-changes of horocycle flows*, ukaże się w Discrete Contin. Dynam. Systems, arXiv:1909.08799v2.
3. P. Berk, A. Kanigowski, *Spectral disjointness of rescalings of some surface flows*, ukaże się w J. London Math. Soc., arXiv:1901.04724.
4. J. Chaika, K. Frączek, A. Kanigowski, C. Ulcigrai, *Singularity of the spectrum for smooth area-preserving flows in genus two and translation surfaces well approximated by cylinders*, ukaże się w Comm. in Math. Physics, arXiv:1912.10250.
5. B. Fayad, G. Forni, A. Kanigowski, *Countable Lebesgue spectrum for area preserving flows on the two torus,*, J. Amer. Math. Soc. 2021, published online: doi.org/10.1090/jams/970

Ta część zajmuje się badaniem widma gładkich układów o zerowej entropii. W 1. oraz 2. opracowaliśmy nowe narzędzia z analizy funkcjonalnej (wprowadzając tzw. funkcjonały Bufetowa) do badania korelacji zamian czasu potoków Heisenberga i horocykli. W punktach 4. i 5. badaliśmy widmo pewnych gładkich potoków na powierzchniach. W szczególności w 5. pokazaliśmy, że istnieje gładki potok na torusie z przeliczalnym widmem Lebesgue'a oraz że zamiany czasu potoków horocykli również mają przeliczalne widmo Lebesgue'a. Udowodniliśmy w ten sposb́ hipotezę A. Katoka i J.-P. Thouvenota.

5.3.5 Twierdzenia o równomiernym rozkładzie dla podzbiorów rzadkich

1. A. Kanigowski, M. Lemańczyk, M. Radziwiłł, *Rigidity in dynamics and Moebius disjointness*,Fund. Math. 225 (2021) 309–326.

2. A. Kanigowski, M. Lemańczyk, M. Radziwiłł, *Prime number theorem for analytic skew-products*, submitted, arXiv:2004.01125.

3. A. Kanigowski, *Prime orbits for some smooth flows on the torus*, submitted, arXiv:2005.09403.

4. K. Frączek, A. Kanigowski, M. Lemańczyk, *Prime number theorem for Toeplitz systems*, opublikowano online w Erg. Th. and Dyn. Sys., DOI: https://obi.org/10.1017/etds.2021.3

Ta część moich badań leży na pograniczu teorii układów dynamicznych i analitycznej teorii liczb. Głównym celem jest badanie orbit układów dynamicznych wzdłuż czasów pierwszych. W 2. pokazaliśmy pierwsze przykłady niealgebraicznych gładkich układów, dla których zachodzi twierdzenie o liczbach pierwszych. Techniki te wykorzystują bardzo głębokie narzędzia (i nowe wyniki) z układów dynamicznych i analitycznej teorii liczb (rozkład liczb pierwszych w postępach arytmetycznych z dużymi modułami). W 3. pokazałem istnienie słabo mieszających układów, dla których zachodzi twierdzenie o liczbach pierwszych. W 4. pokazaliśmy, że twierdzenie o liczbach pierwszych nie musi obowiązywać dla regularnych układów Toeplitza pomimo ich szybkiej aproksymacji układami okresowymi.

6 Inne osiągnięcia

Nagrody i granty

- Nagroda Instytutu Matematycznego za pracę doktorską, przyznana przez: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, (2015).

- Międzynarodowa nagroda im. Banacha za rozprawę doktorską z nauk matematycznych, przyznana przez: Polskie Towarzystwo Matematyczne, (2016).

- Nagroda Polskiego Towarzystwa Matematycznego dla Młodych Matematyków, (2016)

- Nagroda Kazimierza Kuratowskiego (dla matematyków, którzy nie ukończyli 30 roku życia), przyznawana przez: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk i Polskie Towarzystwo Matematyczne, (2017), https://www.impan.pl/en/events/awards/kazimierz-kuratowski.

- PI, grant NSF DMS-1956310, *Własności ergodyczne układów gładkich na rozmaitościach*, 2020-2022.
- Co-PI, grant konferencyjny NSF DMS-1956303, *Konferencja układów dynamicznych w Marylandzie*, 2020-2022.

Wystąpienia na konferencjach i seminariach

- Dynamics Workshop, State College, (28 października- 1 listopada, 2021).
- Dynamics Seminar, Penn State University, (10 października, 2021).
- Resistencia Dinamica, Rio de Janeiro (online), (6 czerwca, 2021).
- Midwest Dynamics Seminar, Chicago (online), (12 kwietnia 2021).
- Dynamics Seminar in Paris (online), (17 stycznia 2021).
- Ergodic Theory Seminar, Toruń (online), (2 wykłady w grudniu 2020).
- Dynamics Seminar, College Park (online), (10 April, 2020).
- Dynamics, Geometry and Combinatorics - Lausanne (21 -25 października 2019).
- Parabolic Dynamics, Zurich (1-5 lipca 2019).
- Joint Mathematical Meeting, Baltimore, (16 stycznia 2019).
- Dynamical systems seminar, University of Zurich, (16 grudnia 2018).
- Workshop on Sarnak's Conjecture, AIM, San José, (10-14 grudnia 2018).
- Journée Dynamique, Paris VI and VII, (6-8 grudnia, 2018).
- Ergodic Theory Seminar, Princetion, (marzec 2018).
- Dynamical Systems Seminar, University of Chicago (13 listopada 2017).
- Seminarium z teorii ergodycznej i układów dynamicznych, Toruń (6.06.2017).
- Working Seminar, Penn State University, (marzec 2017).
- Dynamical Systems Seminar, University of Maryland, (17 listopada 2016).
- Semi-annual workshop in Dynamical Systems and Related Topics, Penn State University (27-30 października 2016).
- Konferencja Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Olsztyn (12-17 września 2016).
- Semi-annual workshop in Dynamical Systems and Related Topics, Penn State University (22-26 października 2015).
- Dynamical systems seminar, Penn State University (7 września 2015).

- Seminarium z teorii ergodycznej i układów dynamicznych, Toruń (2.06.2015).
- Seminarium Układy Dynamiczne, Wrocław (1.04.2015, 8.04.2015).
- Dynamical systems seminar, Bristol (12 grudnia 2014).
- JournĂŠes Dynamiques P6-P7, Paris (27 października 2014).
- Semi-annual workshop in Dynamical Systems, Penn State University (16-19 października 2014).
- Dynamical Systems Seminar, Northwestern University (12 października 2014).
- Teoria ergodyczna i układy dynamiczne, Toruń (12-16 maja 2014).
- Wandering Seminar, Warszawa (24-27.04.2014).
- Probability, Ergodic Theory, Dynamical Systems and Related Fields, Tel-Aviv (08-11 kwietnia 2014).
- Ergodic Theory Workshop, Chapel Hill (03-06 kwietnia 2014).

Działalność dydaktyczna

- Matematyka 140 (Rachunek I), zapisy: 50, Stan Pensylwania 2015,
- Matematyka 140 (Rachunek I), zapisy: 80, Stan Pensylwania 2016,
- Matematyka 506 (seminarium magisterskie Teoria Ergodyczna), zapisy: 8, Stan Pensylwania 2017,
- Matematyka 403 (Analiza I), zapisy: 35, Stan Pensylwania 2018,
- Matematyka 452 (Wprowadzenie do dynamiki i chaosu), zapisy: 25, UMD 2018,
- Matematyka 406 (Wprowadzenie do teorii liczb), zapisy: 30, UMD 2019,
- Matematyka 310 (Wprowadzenie do dowodów matematycznych), zapisy: 31, UMD 2020,
- Matematyka 406 (Wprowadzenie do teorii liczb), zapisy: 35, UMD 2020.

Opieka naukowa nad młodymi matematykami

- nadzorowanie letniego programu badawczego Aarona Bendy (studia licencjackie) na UMD oraz nadzorowanie jego badań nad twierdzeniami o nieliczbowych rozkładach równomiernych (zakończonych pracą).
- praca z Changguang Dongiem (Brin Postdoc na UMD) nad zagadnieniami z teorii gładkiej ergodyczności, w tym dynamiki parabolicznej i własności Bernoulliego (4 wspólne prace).

- praca z Agnieszką Zelerowicz (Brin Postdoc na UMD) nad zagadnieniami z zakresu formalizmu termodynamicznego dla układów częściowo hiperbolicznych (1 projekt w toku).
- praca z Darenem Wei (absolwentem PSU) nad równoważnością Kakutaniego w abstrakcyjnej teorii ergodycznej (7 wspólnych prac). Za swoją pracę nad równoważnością Kakutaniego. Daren odbywa staż podoktorski u E. Lindenstraussa (od jesieni 2020).
- praca z Minsungiem Kimem (absolwentem UMD) nad poziomem mieszania dla nilpotentnych rozszerzeń układów hiperbolicznych.

Recenzowanie prac w:

Duke Math. Journal, Comm. in Math. Physics, Adv. in Math., Ann. Henri Poincaré, Ergodic Theory Dynam. Systems, J. Mod. Dyn., Journal of Number Theory, Discrete and Continuous Dyn. Sys.-Series A., Israel J. Math., Studia Math., J. d'Analyse Math.

Działalność organizacyjna

- Współorganizator, Seminarium Systemów Dynamicznych, Penn State University, (2016-2018),
- Współorganizator, Maryland Dynamics Workshop, Maryland, kwiecień 2019 r,
- Współorganizator, Center for Dynamics Colloquium, Penn State University, (2016-2018),
- Współorganizator, Mathematical Outing for Undergraduates, 2017 r,
- członek komisji, obrona doktoratu Jing Zhou (2020),
- członek komisji, obrona doktoratu Minsunga Kima (2020).

Bibliografia

[1] L. M. Abramov, *The entropy of a derived automorphism*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 128 (1959) 647–650.

[2] F. Beleznay, M. Foreman, *The complexity of the collection of measure-distal transformations*, Ergodic Theory Dynam. Systems 16 (1996), no. 5, 929–962.

[3] I. U. Bronšteĭn, *Extensions of minimal transformation groups*, Translated from the Russian. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1979. viii+319 pp. ISBN: 90-286-0368-9

[4] D. Creutz, C. Silva,*Mixing on rank-one transformations*, Studia Math. 199 (2010), no. 1, 43–72.

[5] T. de la Rue, *Systèmes dynamiques gaussiens d'entropie nulle, lâchement et non lâchement Bernoulli, (French) [Zero-entropy Gaussian dynamical systems that are loosely and not loosely Bernoulli]*, Ergodic Theory Dynam. Systems 16 (1996), no. 2, 379–404.

[6] H. A. Dye, *On groups of measure preserving transformation. I*, Amer. J. Math. 81 (1959) 119–159.

[7] H. A. Dye, *On groups of measure preserving transformations. II*, Amer. J. Math. 85 (1963) 551–576.

[8] B. Fayad, G. Forni, A. Kanigowski, *Countable Lebesgue spectrum for area preserving flows on the two torus,*, J. Amer. Math. Soc. 2021, published online: doi.org/10.1090/jams/970

[9] B. Fayad, A. Kanigowski, *Multiple mixing for a class of conservative surface flows*, Invent. Math., 203 (2) (2016), 555-614.

[10] J. Feldman, *New K-automorphisms and a problem of Kakutani*, Israel J. Math. 24.1 (1976): 16-38.

[11] S. Ferenczi, *Systems of finite rank*, Colloq. Math. 73 (1997), no. 1, 35–65.

[12] S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems*, Israel J. Math. 100 (1997), 189–207.

[13] M. Foreman, D. Rudolph, B. Weiss, *The conjugacy problem in ergodic theory*, Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 3, 1529 – 1586.

[14] M. Foreman, B. Weiss, *An anti-classification theorem for ergodic measure preserving transformations*, (English summary) J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 6 (2004), no. 3, 277–292.

[15] M. Gerber,*A zero-entropy mixing transformation whose product with itself is loosely bernoulli*, Israel Journal of Mathematics 38 (1981), 1–22.

[16] M. Gerber, P. Kunde, *Anticlassification for Kakutani equivalence*, preprint.

[17] S. Kakutani, *Induced measure preserving transformations*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19, (1943). 635–641.

[18] A. Kanigowski, *Slow entropy for some smooth flows on surfaces*, Israel J. Math. 226 (2018), no. 2, 535–577.

[19] A. Kanigowski, T. de la Rue, *Product of two staircase rank one transformations that is not loosely Bernoulli*, Journal d'Analyse Math., 143 (2021) , 535–553.

[20] A. Kanigowski, K. Vinhage, D. Wei, *Slow entropy of parabolic flows*, Commun. Math. Phys. 370 (2019), no. 2, 449–474.

[21] A. B. Katok, *Time change, monotone equivalence, and standard dynamical systems*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 223 (1975), no. 4, 789–792.

[22] A. B. Katok, *Spectral properties of dynamical systems with an integral invariant on the torus.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **223** (1975), 789–792.

[23] A. B. Katok, *Monotone equivalence in ergodic theory*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 41 (1977), no. 1, 104–157, 231.

[24] A. Katok, J. P. Thouvenot, *Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 33 (1997), no. 3, 323–338.

[25] K. M. Khanin and Ya. G. Sinai, *Mixing for some classes of special flows over rotations of the circle*, Funktsionalnyi Analiz i Ego Prilozheniya, **26**, no. 3 (1992), 1–21 (Translated in: Functional Analysis and its Applications, **26**, no. 3, 1992, 155–169).

[26] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, University of Chicago Press, (1964).

[27] D. Y. Kleinbock, N. Shah, A. Starkov, *Dynamics of subgroup actions on homogeneous spaces of Lie groups and applications to number theory. Handbook of dynamical systems*, Vol. 1A, 813–930, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[28] A. V. Kočergin, *Mixing in special flows over a rearrangement of segments and in smooth flows on surfaces* Mat. Sb. (N.S.), 96(138), 1975, 471–502

[29] A. G. Kushnirenko, *Metric invariants of entropy type*, Uspehi Mat. Nauk 22 (1967) no. 5 (137), 57–65.

[30] D. Ornstein, *Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic*, Adv. in Math., 4 (1970),337–352.

[31] D. Ornstein,*On the root problem in ergodic theory.*, In Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971),Vol. II: Probability theory II (1972), 347–356.

[32] Y. Pesin, *Characteristic Ljapunov exponents, and smooth ergodic theory*, Uspehi Mat. Nauk, 32(4 (196)): 55–112, 287, 1977.

[33] D. Ornstein, D. Rudolph, B. Weiss, *Equivalence of measure preserving transformations*, Mem. Amer. Math. Soc., 37(262), 1982.

[34] M. Ratner, *Horocycle flows are loosely Bernoulli*, Israel J. Math. (1978), 31: 122-132.

[35] M. Ratner, *The Cartesian square of the horocycle flow is not loosely Bernoulli*, Israel J. Math. 34 (1979), no. 1-2, 72–96 (1980).

[36] M. Ratner, *Some invariants of Kakutani equivalence*, Israel J. Math. 38 (1981), no. 3, 231–240.

[37] M. Ratner, *Interactions between ergodic theory, Lie groups, and number theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 157–182, Birkhäuser, Basel, 1995.

[38] M. Ratner, *Time change invariants for measure preserving flows*, (English summary) Modern theory of dynamical systems, 263–273, Contemp. Math., 692, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[39] M. Ratner, *Horocycle flows, joinings and rigidity of products*, Ann. of Math. **118** (1983), 277–313.

[40] M. Ratner, *Rigidity of horocycle flows*, Ann. of Math. **115** (1982), 597-614.